نویسنده: توشیو سیمیا
مترجم: احسان یارمحمدی

دربارهٔ چند مثال از استدلال‌های اشتباه‌آمیز هندسی

اقلیــدس[1] کتابی با عنوان «**سـئوداریا**»[2] که موضوع آن دربارهٔ «**اسـتدلال‌های اشتباه‌آمیز هندسی**» بود، نوشته است. البته این کتاب گم شــده و در حال حاضر در دسترس نیست. از زمان اقلیدس تاکنون تعداد بی‌شـماری از مثال‌هایی که دربرگیرندهٔ استدلال‌های اشــتباه‌آمیز هندسی هستند، منتشر شــده‌اند. دو نمونه از این دسته استدلال‌ها که در ادامه به معرفی آن‌ها می‌پردازیم، در کتاب «**مقالات و تفریحات ریاضی**»[3] اثر **روز بال**[4] ارائه شده‌اند.

۱. ثابت کنید که هر **زاویهٔ قائمه** با زاویهٔ بزرگ‌تر از آن برابر است.

۲. ثابت کنید که هر مثلثی **متساوی‌الساقین** است.

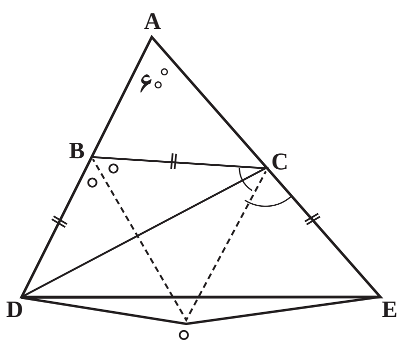
در این مثال‌ها، هنگامی که شــکل‌های متناظر با آن‌ها به‌صورت دقیق و درســت رســم شوند، اشــتباهات و خطاها ســریعاً مشخص می‌شوند. حتی زمانی که شکل‌های مطلوب به‌صورت درست و دقیق رسم شده‌اند و استدلال نیز درست است، استدلال‌های اشتباه‌آمیزی ممکن اســت رخ بدهنــد. در اغلب اوقات، به‌علــت نبود ملاحظات و دقــت مناســب و کافی، نتایج و دســتاوردهای ناشــی را اســتنباط می‌کنیم. اگر نتایج نادرست مضحک نباشند، ممکن است به سهولت مورد چشم‌پوشــی قرار گیرند. در این مقاله چنــد مثال جدید را که حاوی استدلال‌های اشتباه‌آمیز هندسی هستند، ارائه می‌کنیم. البته اشتباهات و ایرادهای موجود در این استدلال‌های اشتباه‌آمیز هندسی، بعداً در قســمت پاسخ‌ها که در انتهای این مقاله گنجانده شده است، شرح داده خواهند شد.

ابتدا یک **قضیه** درســت را ارائه می‌کنیم و ســپس به بررســی صحت و درســتی عکس این قضیه می‌پردازیــم. این مورد که عکس یک قضیهٔ درســت در ریاضی همیشه برقرار نیست، از نکات برجسته و قابل‌توجه در ریاضیات اســت. در ضمن اســتدلال‌های اشتباه‌آمیز هندسی به‌صورت مکرر در اثبات‌های بررسی شده برای صحت عکس یک قضیه درست، نمایان می‌شوند.

قضیه

اگــر ABC مثلثی با زاویهٔ $\hat{A} = 60^\circ$ باشــد و نیــز D نقطه‌ای در امتداد خط AB باشد، به‌صورتی که BD=BC و E نقطه‌ای در امتداد خط AC باشد، به‌صورتی که BC=CE، آن‌گاه داریم:

$$\widehat{DBC} = 2\widehat{CED},\ \widehat{BCE} = 2\widehat{BDE},\ \widehat{CDE} = 30^\circ$$



اثبات: اگر O محل برخورد نیم‌سازهای زوایای DBC و BCE باشد، چون: BD=BC=CE، در نتیجه داریم:

$$\Delta BDO \cong \Delta BCO,\quad \Delta BCO \cong \Delta ECO$$

بنابراین:

$$\widehat{BDO} = \widehat{BCO},\quad \widehat{BOD} = \widehat{BOC},\quad DO = CO$$

و همچنین:

$$\widehat{CBO} = \widehat{CEO},\quad \widehat{BOC} = \widehat{COE}$$

چون: $\widehat{DBO} = \widehat{CBO}$ و $\widehat{BCO} = \widehat{ECO}$، در نتیجه داریم:

$$\widehat{BOC} = 90^\circ - \frac{1}{2}\widehat{BAC} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

بنابرایــن: $\widehat{DOE} = 3\widehat{BOC} = 180^\circ$. در نتیجه نقطه‌های O ،D و E بر یک استقامت هستند. (بر روی یک خط راست قرار دارند.)

پس:

$\widehat{DBC} = ۲\widehat{CBO} = ۲\widehat{CEO} = ۲\widehat{CED}$

و

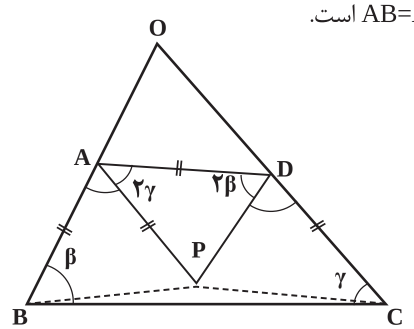
$\widehat{BCE} = ۲\widehat{BCO} = ۲\widehat{BDO} = ۲\widehat{BDE}$

چون: DO=CO، خواهیم دید که: $\widehat{ODC} = \widehat{OCD}$. بنابراین:

$\widehat{CDE} = \widehat{CDO} = \frac{۱}{۲}\widehat{COE} = ۳۰^\circ$

اکنون در ادامه برای قضیهٔ مزبور، دو مورد عکس آن را ملاحظه می‌کنیم.

مثال ۱. فرض کنید ABCD یک **چهارضلعی محدب** (کوژ) باشد به‌صورتی که: AB=CD. اگر داشته باشیم: $\hat{A} = ۲\hat{C}$ و $\hat{D} = ۲\hat{B}$، آن‌گاه AB=AD است.



اثبات: اگر $\hat{\beta} = \hat{B}$ و $\hat{\gamma} = \hat{C}$ را در نظر بگیریم، آن‌گاه داریم: $\hat{A} = ۲\hat{\gamma}$ و $\hat{D} = ۲\hat{\beta}$.

چون $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D} = ۳۶۰^\circ$ است، در نتیجه داریم: $۲\gamma+\beta+\gamma+۲\beta = ۳۶۰^\circ$. بنابراین: $\beta+\gamma = ۱۲۰^\circ$.

اگر O نقطهٔ برخورد (امتدادهای) AB و CD باشد. داریم: $\widehat{BOC} = ۱۸۰^\circ - (\beta+\gamma) = ۶۰^\circ$.

اگر P نقطه‌ای باشد به‌صورتی که AP موازی با DC و CP موازی با DA باشد، و چون چهارضلعی ABCD یک **متوازی‌الاضلاع** است، در نتیجه داریم: AP=DC=AB، PC=AD و $\widehat{APC} = \widehat{ADC} = ۲\beta$. چون:

$\widehat{BAP} = \widehat{BOC} = ۶۰^\circ,\quad AB = AP$

خواهیم داشت که ABP یک مثلث متساوی‌الاضلاع است. بنابراین: $\widehat{ABP} = \widehat{APB} = ۶۰^\circ$.

چون داریم: $\widehat{PBC} = \widehat{ABC} - \widehat{ABP} = \beta - ۶۰^\circ$ و

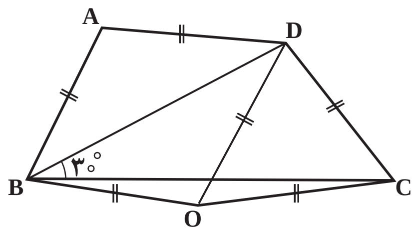
$\widehat{BPC} = ۳۶۰^\circ - (\widehat{APB} - \widehat{APC}) = ۳۶۰^\circ - (۶۰^\circ + ۲\beta)$

در نتیجه:

$\widehat{PCB} = ۱۸۰^\circ - (\widehat{PBC} + \widehat{APC}) = \beta - ۶۰^\circ$

بنابراین: $\widehat{PBC} = \widehat{PCB}$، به‌صورتی که داریم: PB=PC. پس AB=AD.

مثال ۲. فرض کنید که ABCD یک چهارضلعی محدب (کوژ) به‌صورتی است که داریم: AB=AD=CD. اگر $\widehat{DBC} = ۳۰^\circ$ باشد، آن‌گاه $\hat{A} = ۲\hat{C}$ است.



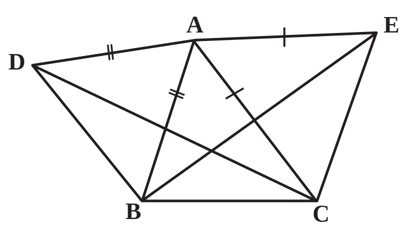
اثبات: اگر نقطهٔ O مرکز دایرهٔ محیطی (فرضی) ΔBCD باشد، آن‌گاه: OB=OC=OD و داریم:

$\widehat{DOC} = ۲\widehat{DBC} = ۶۰^\circ$

بنابراین OCD یک مثلث متساوی‌الاضلاع است و این یعنی: OB=OD=OC=CD.

چون AB=AD=CD است، به‌همین ترتیب داریم: AB=AD=OD=OB. این یعنی چهارضلعی ABOD لوزی است. بنابراین: $\widehat{BAD} = \widehat{BOD} = ۲\widehat{BCD}$.

مثال ۳. فرض کنید که روی اضلاع AB و AC مثلث مفروض ABC به‌ترتیب مثلث‌های متساوی‌الاضلاع ABD و ACE رسم شده‌اند. اگر C، B، D و E نقاط واقع روی محیط دایرهٔ محیطی مثلث باشند، آن‌گاه: AB=AC.



اثبات: چون C، B، D و E نقاط واقع بر محیط دایره هستند، داریم: $\widehat{BDC} = \widehat{BEC}$. چون: $\widehat{BDA} = \widehat{CEA} = ۶۰^\circ$. این یعنی:

$\widehat{ADC} = \widehat{BDA} - \widehat{BDC} = \widehat{CEA} - \widehat{BEC} = \widehat{AEB} \quad (۱)$

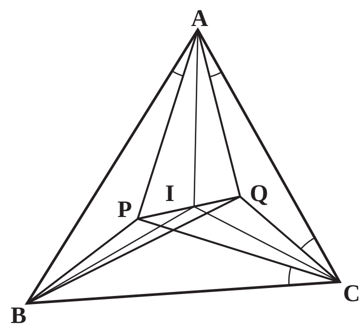
چون داریم: AD=AB ، AC=AE و $\widehat{DAC} = \widehat{BAE}$، این به آن معنی است که: $\Delta ADC \cong \Delta ABE$. بنابراین:

$\widehat{ADC} = \widehat{ABE} \quad (۲)$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم که: $\widehat{AEB} = \widehat{ABE}$. بنابراین:

AB=AE. چون AC=AE است، پس: AB=AC.

مثال ۴. فرض کنید که P و Q نقاط درونی مثلث ABC هستند، به‌صورتی که: $\widehat{PAB}=\widehat{QAC}$ و $\widehat{PCB}=\widehat{QCA}$ و $\frac{AP}{AQ}=\frac{CP}{CQ}$ باشد. آنگاه: $\frac{AP}{AQ}=\frac{BP}{BQ}$.



اثبات: چون $\widehat{PAB}=\widehat{QAC}$ و $\widehat{PCB}=\widehat{QAC}$ هستند و نیز می‌دانیم که نقاط P و Q نقاطی هم‌شیب از مثلث ABCاند، بنابراین: $\widehat{ABP}=\widehat{CBQ}$. اگر نقطهٔ I محل برخورد PQ با نیمساز زاویهٔ $\widehat{PAQ}$ باشد، آن‌گاه:

$$\frac{PI}{IQ}=\frac{AP}{AQ}=\frac{CP}{CQ}$$

بنابراین: $\widehat{PCI}=\widehat{QCI}$. چون: $\widehat{PAB}=\widehat{QAC}$ و $\widehat{PCB}=\widehat{QCA}$، در نتیجه داریم:

$$\widehat{BAI}=\widehat{PAB}+\widehat{PAI}=\widehat{QAC}+\widehat{QAI}=\widehat{CAI}$$

به‌صورت مشابه نتیجه می‌گیریم که: $\widehat{BCI}=\widehat{ACI}$. بنابراین I نقطهٔ مرکزی مثلث ABC است. پس:

$$\widehat{ABI}=\widehat{CBI}$$

بنابراین: $$\widehat{PBI}=\widehat{ABI}-\widehat{ABP}=\widehat{CBI}-\widehat{CBQ}=\widehat{QBI}$$

در ضمن: $$\frac{BP}{BQ}=\frac{PI}{IQ}=\frac{AP}{AQ}$$

تذکر: در شکل بالا داریم: $\frac{AP}{AQ}=\frac{CP}{CQ}>1$، اما: $\frac{BP}{BQ}<1$.

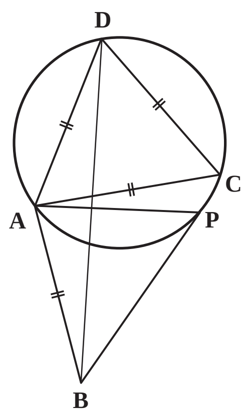
پاسخ‌ها

خطاها و اشتباهات موجود در اثبات‌های هندسی اشتباه‌آمیز چهار مثال ارائه شده، به‌صورت مختصر در ادامه بیان شده‌اند.

مثال ۱. اشتباه رخ داده در استدلال مزبور عبارت است از اینکه اگر: $\widehat{PBC}=\widehat{PCB}$، آن‌گاه: PB=PC. اگر: $\widehat{PBC}=\widehat{PCB}=0^\circ$ باشد، نمی‌توان نتیجه گرفت که: PB=PC.

برای مثال نقض فرض کنید که ABCD یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین است که در آن داریم: $AB=CD\neq AD$ و $\hat{A}=\hat{D}=120^\circ$.

مثال ۲. اشتباه رخ داده در استدلال مزبور عبارت است از اینکه نقاط A و O تلویحاً به‌صورت متمایز در نظر گرفته شده‌اند. در اینجا حالتی وجود دارد که A مرکز دایرهٔ محیطی (فرضی) ΔBCD است. بنابراین، اندازهٔ زاویهٔ اصلی BAD برابر با $2\widehat{BCD}$ است.



برای مثال نقض فرض کنید که ΔACD متساوی‌الاضلاع است و نقطهٔ P روی کمان (کوچک‌تر) AC دایرهٔ محیطی ΔACD به‌صورتی قرار دارد که: $AP>PC$. اگر B نقطه‌ای روی امتداد CP باشد، به‌صورتی که: AB=AC، آن‌گاه ABCD یک چهارضلعی محدب (کوژ) است که در آن داریم: AB=AD=CD و $\widehat{DBC}=30^\circ$. در اینجا A مرکز دایرهٔ محیطی ΔBCD است.

مثال ۳. اشتباه رخ داده در استدلال مزبور عبارت است از اینکه اگر: $\widehat{AEB}=\widehat{ABE}$، آن‌گاه: AB=AE. بنابراین اگر: $\widehat{AEB}=\widehat{ABE}=0^\circ$ باشد، نمی‌توان نتیجه گرفت که: AB=AE.

برای مثال نقض فرض کنید که ABC مثلثی است با: $\hat{A}=120^\circ$ و $AB\neq AC$.

مثال ۴. این مورد را به آسانی می‌توان بررسی کرد که: $\widehat{ABP}=\widehat{CBP}$ و $\widehat{ABQ}=\widehat{CBQ}$. بنابراین نقاط B، P، Q و I بر یک استقامت هستند. اشتباه رخ‌داده در استدلال مزبور عبارت است از اینکه اگر $\widehat{PBI}=\widehat{QBI}$ باشد، آن‌گاه: $\frac{PI}{IQ}=\frac{BP}{BQ}$. بنابراین اگر $\widehat{PBI}=\widehat{QBI}=0^\circ$ باشد، نمی‌توان نتیجه گرفت که: $\frac{PI}{IQ}=\frac{BP}{BQ}$.

پی‌نوشت‌ها

1. Euclid
2. Pseudaria
3. Mathematical Recreations and Essays
4. Rouse Ball

منبع

Toshio Seimiya. On Some Examples of Geometric Fallacies. Crux Mathematicorum with Mathematical Mayhem (2003). Canadian Mathematical Society.